

Fonctions (V)

1

Les primitives usuelles :

Les fonctions	Les primitives *	Intervalle de validité
x	$\frac{1}{2} x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3} x^3$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ou x^{-n} ($n > 2 \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

* avec $+ C$, $C \in \mathbb{R}$ pour avoir toutes les primitives.

Les opérations de primitives :

Les fonctions	Les primitives *	Conditions supplémentaires
$u + v$	$U + V$	
λu ($\lambda \in \mathbb{R}$)	λU	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$

$$u' \times u^n \xrightarrow{(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\})} \frac{1}{n+1} u^{n+1} \longrightarrow \begin{matrix} \text{Si } n \leq -2 \\ u(x) \neq 0 \end{matrix}$$

$$u' \times e^u \longrightarrow e^u$$

Les équations différentielles!

$$y' = ay \rightarrow \text{équation homogène}$$

Soit a un nombre réel non nul

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto R e^{ax}$

$$R \in \mathbb{R}$$

$$y' = ay + b \rightarrow \text{eq diff du premier ordre}$$

Soit a et b deux nombres réels non nul

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$x \mapsto R e^{ax} - \frac{b}{a}, R \in \mathbb{R}$$

$$y' = ay + f$$

Soit a un nombre réel non nul et f définie sur $\mathbb{R}$

Les solutions de l'équation différentielle

$y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto R e^{ax} + g(x)$, $R \in \mathbb{R}$ et g est une solution

particulière de l'eq diff

Méthode de résolution de $y' = ay + b$

- 1) Se ramène à une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$
- 2) Détermine une solution particulière constante:

Soit g une fonction constante solution particulière de (E)

$$g \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = ag(x) + b$$

$$\Leftrightarrow 0 = ag(x) + b$$

$$\Leftrightarrow g(x) = c$$

- 3) Détermine la solution de l'équation homogène:

Les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto R e^{at}$, $R \in \mathbb{R}$

- 4) On additionne les deux résultats pour résoudre l'équation initiale:

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = R e^{ax} + g(x), R \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = R e^{ax} + c, R \in \mathbb{R} \text{ et } c \rightarrow 2)$$

- 5) Vérifier la condition demandée:

On cherche $R \in \mathbb{R}$ tel que $f(d) = e$: (1)

$$(1) \Leftrightarrow R e^{ad} + c = e$$

$$(1) \Leftrightarrow R = 2$$

Donc la solution cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 e^{ax} + c$, $c \rightarrow 2$)

$2 \rightarrow 5)$